

Die Ameise im Quadrat

Lernprozesse beim Sachrechnen begleiten

„Sachrechnen mag ich nicht! Ich rechne lieber richtige Aufgaben!“ Diese Meinung einer Drittklässlerin wird so sicher von vielen Kindern geteilt. Auch viele Lehrkräfte behandeln das Sachrechnen eher stiefmütterlich: „Viele Kinder haben so schon mit der Arithmetik Schwierigkeiten. Da brauche ich erst gar nicht mit dem Sachrechnen anzufangen!“

Zweifellos stellt das Sachrechnen hohe Anforderungen, sowohl an die mathematischen Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler als auch an die didaktischen und methodischen Kompetenzen der Lehrerinnen und Lehrer. Allerdings steckt in diesem Bereich so viel mehr als das im Mathematikunterricht verbreitete Überbetonen von Regeln und Rechnen. Winter (1981) hat zwischen drei verschiedenen didaktischen Funktionen des Sachrechnens unterschieden (Kasten S. 21):

- Sachrechnen ist Lernstoff.
- Sachrechnen ist Lernprinzip.
- Sachrechnen ist ein Beitrag zur Umwelterschließung.

Es wird deutlich, wie bedeutungsvoll dieses Themengebiet ist. In diesem Beitrag wird vorgestellt, wie mit einer passenden Lernbegleitung die Schwierigkeiten beim Sachrechnen umschifft und die didaktischen

Potenziale nutzbar gemacht werden können.

Wie lösen Kinder Sachaufgaben?

Möchte man als Lehrkraft im Bereich des Sachrechnens eine adäquate Lernbegleitung konzipieren, muss man sich über die folgenden Dinge im klaren sein: Sachaufgaben stellen in der Regel eine Form von außermathematischen Problemstellungen dar, die mit Hilfe der mathematischen Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler gelöst werden müssen. Für dieses Übersetzen der Sachsituation in eine mathematische Sprache, das innermathematische Lösen und das Rückübersetzen auf die Sachsituation benötigen die Schülerinnen und Schüler Modellierungskompetenz. Der Modellierungsprozess, der der

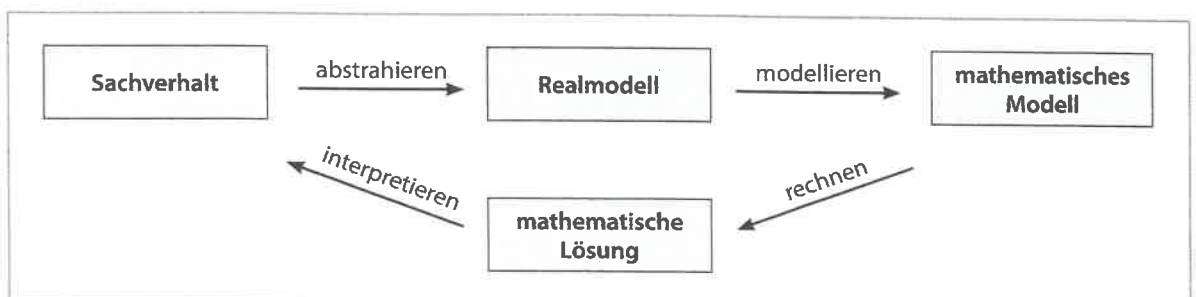
Lösung einer Sachaufgabe zu Grunde liegt, kann in Anlehnung an Grassmann et al. (2010) vereinfacht wie in Abb. 1 dargestellt werden.

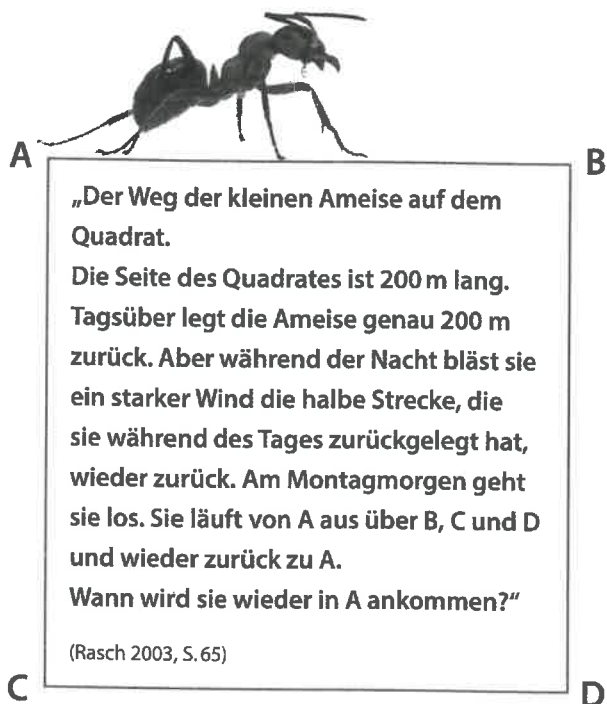
Offensichtlich handelt es sich beim Lösen von Sachaufgaben um einen komplexen Prozess, der in allen Phasen hohe Anforderungen an die Kinder stellt, die wiederum potenzielle Hürden darstellen können. Diese Hürden werden an der Sachaufgabe auf S. 21 verdeutlicht:

Hürden bei der Lösung der Aufgabe

- Zuerst wird sinnentnehmendes Lesen bzw. Textverständnis vorausgesetzt. Es kann aber sein, dass die Lesekompetenz einiger Schülerinnen und Schüler nicht ausreicht. Die Ameisenaufgabe ist sehr komplex formuliert und enthält Fachbegriffe (z. B. ein Quadrat mit den Ecken A, B, C und D), zu denen eine Vorstellung aufge-

Abb. 1:
Der Modellierungsprozess
beim Lösen einer
Sachaufgabe





baut sein muss, damit die Aufgabe lösbar wird.

- Ein Realmodell können die Schülerinnen und Schüler nur aufbauen, wenn sie sich unter der Situation etwas vorstellen können. Ein Kind muss sich die Bewegungen der Ameise auf dem Quadrat vorstellen und fortführen können.
- Ist das Modell aufgebaut, bleibt die Schwierigkeit herauszufinden, an welchen Stellen die zurückgelegten Strecken der Ameise addiert und subtrahiert werden müssen. Viele Schülerinnen und Schüler neigen dazu, Zahlen irgendwie zu verrechnen. Das Phänomen der sog. Kapitänsaufgaben (vgl. Baruk 1989; Stern 1992) ist ein gutes Beispiel dafür („Auf einem Schiff sind 10 Schafe und 12 Ziegen. Wie alt ist der Kapitän?“ – 22 antworten viele Kinder). Oder es werden Rechenoperationen verwendet, die gerade im Unterricht thematisiert wurden.
- Und zu guter Letzt bleibt noch die Herausforderung, die gefundene Lösung wieder auf die Ausgangssituation zu übertragen und den korrekten Wochentag zu nennen. Dabei tritt oftmals das Problem auf, dass die gefundene Antwort nicht zur Ausgangsfrage passt oder dass die Zahlenwerte für den

geschilderten Sachverhalt höchst unwahrscheinlich sind.

Es ist also nicht weiter verwunderlich, dass Sachaufgaben im Vergleich zu strukturgleichen arithmetischen Aufgaben um bis zu 30% schlechter gelöst werden (vgl. Reusser 1997).

Kinder beim Bearbeiten von Sachaufgaben begleiten

Es existiert kein Normalverfahren zur Lösung von Sachaufgaben wie der Ameisenaufgabe. Für alle praktizierten Schemata (z. B. der Klassiker „Frage – Rechnung – Antwort“) gilt der Vorwurf, den Kindern, die beim Bearbeiten größere Probleme haben, helfe dieses Verfahren nicht viel (vgl. Falkner 1999) – und die anderen bräuchten es nicht.

Das Drei-Phasen-Modell (vgl. Haug/Helmerich 2017) eignet sich aber erfahrungsgemäß sehr gut, um Schülerinnen und Schüler beim Bearbeiten von Sachaufgaben zu unterstützen, weil es keinen Bearbeitungsweg vorschreibt, sondern nur nach Bedarf und punktuell unterstützend eingesetzt werden kann:

- Ausgangspunkt ist das Beobachten auf Basis des oben dargestellten Modellierungsprozesses

Sachrechnen ist ...

Lernstoff

Die Schülerinnen und Schüler setzen sich mit den verschiedenen Größenbereichen und ihren Besonderheiten auseinander.

Lernprinzip

Mit den Erkenntnissen der Lernpsychologie lässt sich begründen, dass es didaktisch sinnvoll ist, einen Lernprozess mit der Beobachtung eines umweltlichen Phänomens anzustoßen. Dadurch erhöht sich die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Schülerinnen und Schüler angesprochen fühlen, weil sie die Bedeutung für ihre eigene Lebenswelt entdecken.

Ein Beitrag zur Umwelterschließung

Dies ist wohl die umfassendste Funktion, zumal sie in gewissen Anteilen die beiden anderen Funktionen beinhaltet. Zudem ist es die unterrichtspraktisch am schwierigsten umzusetzende Funktion, da durch sie die Schülerinnen und Schüler die Mathematik als Werkzeug zur Lösung alltäglicher Probleme nutzen sollen (vgl. Winter 1981).

(Phase 1: Verstehen). An welcher Stelle des Lösungsprozesses haben die Kinder Schwierigkeiten?

- Im Anschluss kann eine für die jeweilige Phase passende vorbereitete Unterstützungsmaßnahme ausgewählt werden (Phase 2: Strukturieren).
- In der dritten Phase (Intervenieren) werden die ausgewählten Unterstützungsmaßnahmen eingesetzt. Man unterscheidet zwischen Texterschließungshilfen, Bearbeitungshilfen und Hilfen zur Interpretation der gefundenen Lösung.

Die oben dargestellten Hilfen seien an der Ameisenaufgabe illustriert. Bei dieser Art von Sachaufgabe handelt es sich um eine Bewegungsaufgabe, die von den Kindern in der Regel gut gelöst werden kann, da sie sich relativ leicht in die Situation hineinversetzen können. Auch wenn der Kontext keinen direkten Lebensweltbezug hat (welche Ameise läuft denn schon in einem Quadrat?), werden Winters

Die Ameise im Quadrat

Lies die Aufgabe genau und überlege, welche Sätze stimmen.

	Stimmt	Stimmt nicht	Kann ich nicht beantworten
Bei dem Quadrat ist jede Seite 200 m lang.	X		
Am Montagmorgen läuft die Ameise los.	X		
Jeden Tag schafft die Ameise 200 m.	X		
In der Nacht wird sie die ganze Strecke wieder zurück geweht.		X	
In der Nacht wird sie die halbe Strecke wieder zurück geweht.	X		
Die Ameise ist hungrig.			X
Sie läuft die Ecken von A aus über B, C und D.	X		

Abb. 2: Um das Verständnis der Aufgabe zu fördern, wäre eine Möglichkeit, dass die Kinder Aussagen zum Aufgabentext prüfen

Die Ameise im Quadrat

Markiere alle Angaben, die zum Rechnen benötigt werden. Setze dann richtig in die Lücken ein.

Am Tag geht die Ameise 200 Meter. In der Nacht wird sie 100 Meter zurück geweht. Sie startet in Ecke A. Am Montag geht sie los.

Abb. 3: Ein zweites Angebot besteht darin, im Text alles markieren zu lassen, was zum Rechnen benötigt wird

Die Ameise im Quadrat

Beantworte die Fragen

Fragen	Diese Antworten habe ich gefunden
Wie lang ist eine Quadratseite?	200 m lang
Wie lang ist eine halbe Quadratseite?	100 m lang
Wie viele Meter legt sie am ersten Tag zurück?	200 Meter
Wie viele Meter wird sie in der Nacht zurück geweht?	100 m
Was passiert in den nächsten Tagen und Nächten?	# Da geht sie über B, C und D und zu A

Abb. 4: Eine dritte Möglichkeit ist, Fragen zum Text zu beantworten. Das hilft den Kindern, die Aufgabenstellung weiter zu durchdringen

Funktionen 1 und 3 (Sachrechnen als Lernstoff und als Umwelterschließung) durch die Aufgabe angesprochen (Kasten S. 21; vgl. Winter 1981).

In der praktischen Umsetzung haben sich einige Hilfestellungen als wirksam herausgestellt. Eingesetzt wurde diese Aufgabe in mehreren

dritten Klassen. Mit einer Abwandlung des Zahlenmaterials ist aber schon eine Durchführung in jüngeren Klassen denkbar.

Hilfen zur Texterschließung

Diese Unterstützungsmaßnahme setzt am Beginn des Modellierungsprozesses, beim Abstrahieren an. Man kann zwischen Texterschließungshilfen und Texterschließungsstrategien unterscheiden. Texterschließungshilfen werden von der Lehrkraft bereitgestellt. Dies könnten z. B. Wörterlisten, Maßnahmen zur Textvereinfachung oder konkreten Fragen, die zur Aufgabe beantwortet werden sollen, sein. Texterschließungsstrategien sollen langfristig von den Schülerinnen und Schülern selbstständig genutzt werden. Dazu gehören beispielsweise Tätigkeiten wie Fragen zum Text zu stellen oder wichtige Textstellen zu markieren.

Als Texterschließungshilfe bietet es sich bei dieser Aufgabe an, mit den Kindern zunächst unverstandene Wörter zu klären. „Was ist ein Quadrat und wie sieht es aus?“ musste in vielen Klassen mit einigen Kindern geklärt werden. Auch das man die Ecken dieser Figur mit A, B, C und D bezeichnet, musste thematisiert werden. Dabei wurden sowohl mit Gesprächsrunden als auch mit entsprechenden Tippkarten gute Erfahrungen gemacht.

Um das Verständnis für die Aufgabe zu fördern, ist es auch hilfreich, wenn die Schülerinnen und Schüler sich intensiver mit Hilfe der in Abb. 2–4 dargestellten Texterschließungshilfen mit der Aufgabenstellung beschäftigen.

Hilfen zur Bearbeitung

Neben vielen möglichen Formen der Bearbeitungshilfen lassen sich grafische Bearbeitungshilfen im Modellierungsprozess zur Unterstützung des Modellierens und des Rechnens einsetzen. „Für viele Kinder (...) sind die grafischen Bearbeitungshilfen eine

echte Unterstützung“ (Franke 2003, S. 73). Allerdings sind sie keine Selbstläufer und müssen im Unterricht mit den Kindern gezielt thematisiert werden, um als Hilfe wahrgenommen zu werden. Für Bewegungsaufgaben, wie der Ameisenaufgabe, eignen sich sehr gut Situationskizzen oder Zeichnungen (Abb. 5–7):

Hilfen zur Validierung des Ergebnisses

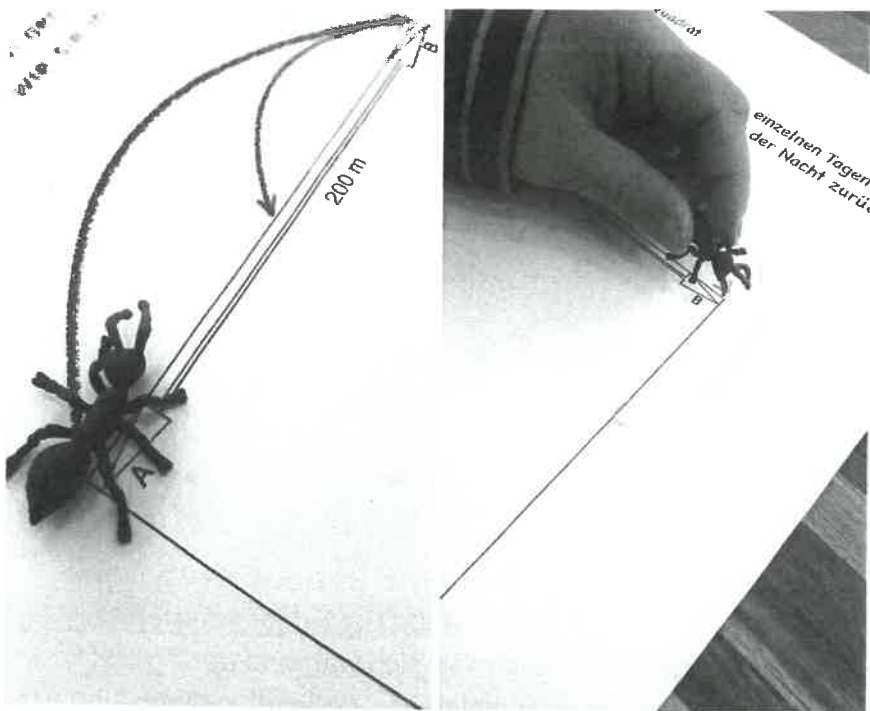
Auch hier gibt es mehrere Wege, die Schülerinnen und Schüler im letzten Schritt des Modellierungsprozesses zu unterstützen. Eine schon in anderen Bereichen des Mathematikunterrichts bewährte Methode stellt die Mathekonferenz dar (vgl. Götze 2007). Die Kinder, die fertig sind, finden sich in Gruppen zu je vier Kindern zusammen. Sie stellen sich zunächst gegenseitig ihre Lösungswege und Lösungen vor und einigen sich im Anschluss auf eine Lösung, die vor der ganzen Klasse präsentiert wird.

Eine weitere Möglichkeit ist es, die Kinder nach der Präsentation des Ergebnisses mit der Frage „Kann das stimmen!“ zum erneuten Rückbezug des Ergebnisses auf die Aufgabenstellung zu motivieren. Als dritte Möglichkeit kann die Lehrkraft drei unterschiedliche Lösungswege und Ergebnisse bereithalten und die Kinder das richtige Ergebnis begründet auswählen lassen.

Wie kann es weitergehen?

Ziel einer Lernbegleitung sollte sein, dass sie irgendwann überflüssig wird. Da die Anforderungen beim Sachrechnen an die Schülerinnen und Schüler so hoch sind, ist es daher wichtig, einen entsprechenden Lehrgang systematisch aufzubauen.

Nach Beendigung der Unterrichtsreihe „Die Ameise im Quadrat“ sollten die angebahnten Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler mit struk-



Die Ameise im Quadrat

Zeichne ein, wie die Ameise an den einzelnen Tagen am Quadrat entlang läuft und wie sie in der Nacht zurück geweht wird.



Abb. 5–7: Die Abbildungen zeigen die Bearbeitung einer Schülerin. Mit Hilfe der Unterstützungsmaßnahme ist es ihr gelungen, die Aufgabe zu lösen. Bei der Bearbeitung konnte man sehr gut beobachten, wie sie die Aufgabe gleichsam nachspielte. Vielen Kinder, die in ihrem Abstraktionsvermögen noch nicht so weit sind, hilft es sehr, wenn sie Aufgaben nicht auf einer symbolischen oder ikonischen, sondern auf einer handelnden Ebene bearbeiten können. Dies entspräche einer Intervention in der dritten Phase des Drei-Phasen-Modells. Durch den Wechsel der Repräsentationsebene wird die Bearbeitung der Aufgabe erleichtert

turgleichen Aufgaben ausgebaut werden, damit die Kinder die zuvor erfahrenen Hilfen aus der Lernbegleitung immer selbstständiger nutzen. Dafür bieten sich beim Sachrechnen folgende Variationsmöglichkeiten an:

- Veränderung des Zahlenmaterials: Die Ameise legt am Tag weiterhin 200 m zurück, das Quadrat hat aber beispielsweise eine Seitenlänge von 300 m, oder die Ameise wird in der Nacht nur 50 m zurückgeweht.
- Variation des Kontextes: Die Ameise könnte auch auf einem Rechteck oder einem Dreieck laufen.
- Strukturgleiche Sachaufgaben: Auf Adam Ries geht die folgende Aufgabe zurück: „Unten an einer schönen Linden, war ein kleiner Wurm zu finden. Der kroch hinauf mit aller Macht, acht Ellen richtig bei der Nacht, und alle Tage kroch er wieder vier Ellen dran hernieder. Zwölf Nächte trieb er dieses Spiel, bis dass er von der Spitze fiel. Wie hoch ist der Baum?“ Oder eine weitere Aufgabe in Anlehnung an Renate Rasch (2003): „Eine kleine Schnecke fällt in einen 9 Meter tiefen Brunnen. Sie

beginnt die Brunnenwand hinauf zu kriechen. Am ersten Tag schaffte sie 3 Meter, rutschte aber in der Nacht wieder 2 Meter hinunter. So geht es auch die folgenden Tage. Wie lange dauert es, bis die Schnecke den Brunnenrand erreicht?“ Man erkennt sofort, dass man den gleichen Bearbeitungsweg wie bei der Ameisenaufgabe zur Lösungsfindung einschlagen kann. Die Schülerinnen und Schüler erkennen die Strukturgleichheit in der Regel sehr schnell.

Fazit

Sachrechnenkompetenz entwickelt sich nicht durch das Erlernen von Musterlösungen oder Schrittfolgen, sondern durch stetiges Üben des Modellierungsprozesses und Reflektieren über unterschiedliche Lösungswege.

Dabei bedarf es einer verständigen Lehrkraft, die diesen Kompetenzaufbau, beispielsweise mit den in diesem Beitrag vorgestellten individuellen Hilfestellungen, in allen Phasen des Modellierens unterstützt.

Literatur

- Baruk, S. (1989): Wie alt ist der Kapitän? Über den Irrtum in der Mathematik. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag.
- Falkner, H. (1999): Wie viele Pinguine passen in einen Fahrstuhl? Neues Sachrechnen in der Grundschule. München: Oldenbourg.
- Franke, M. (2003): Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- Götze, D. (2007): Mathematische Gespräche unter Kindern. Zum Einfluss sozialer Interaktion von Grundschulkindern beim Lösen komplexer Aufgaben. Hildesheim: Franzbecker.
- Grassmann M./Eichler, K.-P./Mirwald, E.; Nitsch, B. (2010): Mathematikunterricht. Kompetent im Unterricht der Grundschule. Baltmannsweiler: Schneider Hohengehren.
- Haug, R./Helmerich, M. (2017): Lernbegleitung in offenen Unterrichtssituationen. In: mathematik lehren, Heft 200, Velber: Friedrich Verlag, S. 41–43.
- Rasch, R. (2003): 42 Denk- und Sachaufgaben. Wie Kinder mathematische Aufgaben lösen und diskutieren. Seelze: Kallmeyer.
- Reusser, K. (1997): Erwerb mathematischer Kompetenzen: Literaturüberblick. In: Weinert, F./; Helmke, A. (Hrsg.): Entwicklung im Grundschulalter. Weinheim: Beltz, S. 141–155.
- Stern, E. (1992): Warum werden Kapitänsaufgaben „gelöst“? Das Verstehen von Textaufgaben aus psychologischer Sicht. In: Der Mathematikunterricht Velber: Friedrich Verlag., H. 4, S. 7–29.
- Winter, H. (1992): Sachrechnen in der Grundschule. Berlin: Cornelsen.